

$7=11$ 人,占样本的 $\frac{11}{40}$,所以估计该校七、八两个年级对冬奥会关注程度高的学生一共有 $\frac{11}{40} \times (500+500) = 275$ 人.

18. 【解】(1) 由题图可知, $10 \times (x + 0.015 + 0.02 + 0.03 + 0.025) = 1$, 解得 $x = 0.01$. \therefore 在 $[50, 80)$ 内的频率为 $0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45 < 0.6$, 在 $[50, 90)$ 内的频率为 $0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.3 = 0.75 > 0.6$, \therefore 60% 分位数位于区间 $[80, 90)$ 内, 设为 m , 则 $0.45 + (m - 80) \times 0.03 = 0.6$, 解得 $m = 85$, \therefore 估计这 600 名学生评分的 60% 分位数为 85.

(2) \therefore 低于 80 分的学生中三组学生的人数之比为 $0.1 : 0.15 : 0.2 = 2 : 3 : 4$, \therefore 应选取评分在 $[60, 70)$ 的学生人数为 $30 \times \frac{3}{2+3+4} = 10$.

(3) 由题图知, 认可程度的平均分为 $\bar{x} = 55 \times 0.1 + 65 \times 0.15 + 75 \times 0.2 + 85 \times 0.3 + 95 \times 0.25 = 79.5 < 0.85 \times 100 = 85$, 则“校本课程”工作需要进一步整改.

19. 【解】(1) 由频率分布直方图可得, 在区间 $[0, 160]$ 的频率总和恰为 0.7, 由样本估计总体, 可得临界值 a 的值为 160, 估计众数为 $(120, 160]$ 的中间值 140, 估计平均数为 $20 \times 0.04 + 60 \times 0.12 + 100 \times 0.24 + 140 \times 0.3 + 180 \times 0.25 + 220 \times 0.05 = 130$.

(2) 由(1)知, 月用电量在 $[0, 160]$ 内的居民在使用阶梯电价前后用电量不变, 节电量为 0 千瓦·时;

月用电量在 $(160, 200]$ 内的 50 户居民, 平均每户月用电量为 180 千瓦·时, 超出部分为 20 千瓦·时, 根据题意, 每户每月节电 $20 \times 40\% = 8$ 千瓦·时, 50 户每月共节电 $8 \times 50 = 400$ 千瓦·时;

月用电量在 $(200, 240]$ 内的 10 户居民, 平均每户月用电量为 220 千瓦·时, 超出部分为 60 千瓦·时, 根据题意, 每户每月节电 $60 \times 40\% = 24$ 千瓦·时, 10 户每月共节电 $24 \times 10 = 240$ 千瓦·时;

故样本中 200 户居民每月共节电 $400 + 240 = 640$ 千瓦·时, 用样本估计总体, 得全市居民每月节电量约为 $640 \times \frac{300\,000}{200} = 96$ 万千瓦·时.

(3) 由题意可得, 全市缴纳电费总额不变, 由于“未超出部分”的用电量在“阶梯电价”前后不变, 故“超出部分”对应的总电费也不变, 在 200 户居民组成的样本中, 每月用电量共超出 $20 \times 50 + 60 \times 10 = 1\,600$ 千瓦·时, 实行“阶梯电价”后, 共节约 640 千瓦·时, 剩余 960 千瓦·时, 所以 $1\,600 \times 0.5 = 960 \times b$, 解得 $b \approx 0.83$.

第七章 概率

§1 随机现象与随机事件

基础满分

1. D 【解析】先后抛掷两枚质地均匀的硬币, 有先后顺序, 则此试验的样本空间为 $\{(\text{正面}, \text{正面}), (\text{正面}, \text{反面}), (\text{反面}, \text{正面}), (\text{反面}, \text{反面})\}$. 故 D 正确.

2. ①② 【解析】明天的事是未来才发生的事, 具有不确定性, 故①②属于随机现象; 易知在三角形中, 大角对大边, 故③属于确定性现象.

3. 10 【解析】从标有 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张纸片中任取 2 张, 不同的取法

有 $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)$, 共 10 种.

4. 【解】(1) 依题意得, 样本空间为 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

(2) 依题意得, 样本空间为 $\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e)\}$.

5. B 【解析】根据事件的分类可知, 抛硬币正面朝上, 打开电视正在播广告, 两个实数之和为正数均为随机事件, 三角形中不可能有两个直角, B 为不可能事件. 故 B 正确.

6. B 【解析】4 名男生, 2 名女生中随机抽取 3 人, 所有可能为 3 名男

生, 2 男 1 女, 1 男 2 女, 则必然事件为至少有 1 名男生. 故 B 正确.

7. BC 【解析】他投篮一次就命中为随机事件, 故 A 错误;

随机事件发生的可能性越大, 它发生的概率越接近 1, 故 B 正确; 当且仅当两枚骰子出现的点数都为 1 时, 骰子的点数和为 2, 这是有可能的, 故 C 正确;

试验“连续投掷一枚均匀的骰子直到出现 3 点时停止, 观察投掷的次数”的样本空间为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, 故 D 错误.

8. ACD 【解析】A, B 是两个随机事件, $A+B$ 表示两个事件至少有一个发生, 故 A 正确; $\overline{A+B}$ 表示两个事件均不发生, 故 C

正确; $\overline{A}\overline{B}$ 表示两个事件均不发生,故D正确;
 $\overline{AB}+A\overline{B}$ 表示两个事件恰有一个发生,故B错误.

9. AD 【解析】事件C,E均为“选出的2个人是1个男生和1个女生”,则 $C=E$,故A正确;

事件A:“选出的2个人是1个男生和1个女生或者2个女生”,事件B:“选出的2个人是1个男生和1个女生或者2个男生”,则 $A \neq B$,故B错误;

事件D,E包含的样本点都不相同,则 $D \cap E = \emptyset$,故C错误;

事件B,D包含的样本点都不相同,则 $B \cap D = \emptyset$,事件B:“选出的2个人是1个男生和1个女生或者2个男生”,事件D:“选出的2个人是2个女生”,则 $B \cup D$ 包含了样本空间中所有的样本点,所以 $B \cup D = \Omega$,故D正确.

10. ①② 【解析】样本空间 $\Omega = \{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$,故①正确;

事件B包含两种情况,A元件失效且B元件正常,A元件正常且B元件正常,故事件 $B = \{(0,1), (1,1)\}$,故②正确;

“电路是断路”,说明A元件和B元件至少有一个失效,即事件“电路是断路”可以用 $\overline{A} \cup \overline{B}$ (或 $\overline{A+B}$)表示,故③错误;

“电路是通路”,说明两个元件都正常,所以事件“电路是通路”可以用 $A \cap B$ (或 AB)表示,且只包含1个样本点,故④错误.

11. 【解】(1)由题意知, $A = \{\text{数学书}\}$, $B = \{\text{中文版的书}\}$, $C = \{\text{2000年后出版的}\}$,则 $A \cap B \cap \overline{C} = \{\text{2000年或2000年前出}$

版的中文版的数学书}\}.

(2)由题意知, $A = \{\text{数学书}\}$, $B = \{\text{中文版的书}\}$, $C = \{\text{2000年后出版的}\}$,则在“图书室中所有数学书都是2000年后出版的且为中文版”的条件下,才有 $A \cap B \cap C = A$.

(3)由题意知, $B = \{\text{中文版的书}\}$, $C = \{\text{2000年后出版的}\}$,可得 $\overline{C} \subseteq B$ 表示2000年或2000年前出版的书全是中文版的.

(4)是, $\overline{A} = B$ 意味着图书室中的非数学书都是中文版的,而且所有的中文版的书都不是数学书, $\overline{A} = B$,又可等价成 $\overline{B} = A$,因此也可解释为图书室中所有数学书都不是中文版的,而且所有外文版的书都是数学书.

12. C 【解析】掷骰子有点数为1,2,3,4,5,6六种结果,即 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,事件 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$,故 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \neq \Omega$, $A \cap B = \{2\}$,即事件A,B既不互斥也不对立.故C正确.

13. B 【解析】根据互斥事件、对立事件的定义可得,A与B不互斥,A与C对立,B与C互斥但不对立,故B正确.

14. A 【解析】“恰有1名男生”与“全是男生”不能同时发生,且还有一种情况是“全是女生”,故“恰有1名男生”与“全是男生”是互斥且不对立的两个事件,故A正确;

“至少有1名男生”与“全是女生”是互斥且对立的两个事件,故B错误;

“至少有1名男生”与“全是男生”中,前者包含后者,故它们不互斥,故C错误;
 当事件“选到1男1女”发生时,

“至少有1名男生”与“至少有1名女生”两个事件都发生,故它们不互斥,故D错误.

易错警示 混淆互斥事件与对立事件的概念

对立事件是互斥事件的特殊情况,注意区分两种事件

15. A 【解析】 \because 事件A和事件B不能同时发生, \therefore 事件A和B是互斥事件,

\because 该同学还有政治和化学、政治和生物等不同选择, \therefore 事件A和事件B不是对立事件.

综上,事件A和事件B是互斥事件,不是对立事件,故A正确.

16. BC 【解析】以黑球的个数为切入点,试验的样本空间为 $\Omega = \{0, 1, 2\}$.“恰有一个红球”可用 $A = \{1\}$ 来表示,“都是红球”可用事件 $B = \{0\}$ 来表示,所以事件A,B互斥,但A,B不是对立事件,故A错误;

“恰有一个黑球”可用 $F = \{1\}$ 来表示,“都是黑球”可用事件 $C = \{2\}$ 来表示,所以事件F,C互斥,故B正确;

“至少有一个黑球”可用事件 $D = \{1, 2\}$ 来表示,“都是红球”可用事件 $B = \{0\}$ 来表示,所以事件B,D为互斥事件,也是对立事件,故C正确;

“至少有一个红球”可用事件 $E = \{0, 1\}$ 来表示,“都是红球”可用事件 $B = \{0\}$ 来表示,所以事件 $B \cap E = \{0\}$,即交事件为“都是红球”,故D错误.

§1 考点训练

1. B 【解析】标准大气压下,水加热到100℃,必会沸腾,是确定性现象,故A错误;

走到十字路口,遇到红灯,是随机现象,故 B 正确;

长和宽分别为 a, b 的矩形,其面积为 ab ,是确定性现象,故 C 错误;

实系数一元一次方程必有一实根,是确定性现象,故 D 错误.

2. D 【解析】由定义可知 A, B, C 均正确;

因为随机事件是样本空间的子集,根据子集的定义,故 D 错误.

3. B 【解析】从 A, B, C, D, E 五人中选两人,不同的选法有 (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (B, C), (B, D), (B, E), (C, D), (C, E), (D, E) 10 种,

所以样本空间中样本点的个数为 10. 故 B 正确.

4. D 【解析】从装有 2 件正品和 2 件次品的盒子内任取 2 件产品,可能的结果为 1 正 1 次、2 正、2 次,“至少有 1 件正品”与“都是次品”是对立事件,故 A 不符合题意;

“恰好有 1 件正品”与“恰好有 1 件次品”是同一个事件,故 B 不符合题意;

“至少有 1 件次品”包括 1 正 1 次、2 次,“至少有 1 件正品”包括 1 次 1 正、2 正,这两个事件不是互斥事件,故 C 不符合题意;

“都是正品”与“都是次品”是互斥事件而不是对立事件,故 D 符合题意.

5. AB 【解析】在 25 件同类产品中,有 2 件次品,从中任取 3 件产品,“3 件都是正品”是随机事件;“至少有 1 件次品”是随机事件;“3 件都是次品”是不可能事件;“至少有 1 件正品”是必然事件. 故 AB 正确.

6. BD 【解析】设随机试验“直到 2 个次品都被找到为止需要测试的次数”的样本空间为 Ω , 则 $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$, 故 A 错误;

事件 A_2 和事件 A_3 不能同时发生,互为互斥事件,故 B 正确;

事件 A_4 = “前 3 次测试中有 1 次找到次品, 2 次找到正品, 且第 4 次找到次品或前 4 次均找到正品”, 故 C 错误;

事件 A_5 = “前 4 次测试中有 1 次找到次品, 3 次找到正品”, 故 D 正确.

7. 至少击中 1 发 【解析】事件 A_i = “击中 i 发”, 其中 $i = 0, 1, 2, 3$, 则 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示击中 1 发或击中 2 发或击中 3 发, 即至少击中 1 发.

8. 【解】从装有红、白、黑三种颜色的小球各 1 个的袋子中任取 2 个小球, 则样本空间为 $\Omega = \{(\text{红}, \text{白}), (\text{红}, \text{黑}), (\text{黑}, \text{白})\}$

9. 【解】(1) $\because A = \{\text{出现 1 点}\}, B = \{\text{出现 3 点或 4 点}\}, C = \{\text{出现的点数是奇数}\}, D = \{\text{出现的点数是偶数}\}, \therefore A \subseteq C, A$ 与 D, A 与 B 为互斥事件, $B \cap C = \{3\}, B \cap D = \{4\}, C$ 与 D 为对立事件.

(2) $A \cap B = \emptyset, A \cup B = \{1, 3, 4\},$

$A \cup D = \{1, 2, 4, 6\}, B \cap D = \{4\},$

$B \cup C = \{1, 3, 4, 5\}.$

§2 古典概型

基础满分

1. D 【解析】某种彩票的中奖概率为 $\frac{1}{10\,000}$, 是指买 1 张彩票中奖的

可能性是 $\frac{1}{10\,000}$. 故 D 正确.

2. C 【解析】任何事件的概率是区间 $[0, 1]$ 上的一个确定的数, 故 A

错误;

概率接近于 1, 表明事件发生的可能性大, 但不代表一定发生, 故 B 错误;

概率度量某事件发生的可能性大小, 故 C 正确;

概率接近于 0, 表明事件发生的可能性小, 但不代表一定不发生, 故 D 错误.

3. B 【解析】因为从区间 $[1, 10]$ 内任取一个数, 虽满足等可能性, 但由于区间内有无数个对象可取, 所以它不具备“有限性”这个条件, 故①不是古典概型;

因为试验结果只有 10 个, 并且每个数被抽到的可能性相等, 所以它不仅具备“有限性”, 而且还具备“等可能性”, 故②是古典概型;

任取 2 个球的试验结果只有 10 个, 并且每个结果发生的可能性相等, 故③是古典概型;

虽然试验的结果只有 2 种, 但是这枚硬币的质地不均匀, 所以它不具备“等可能性”, 故④不是古典概型. 故 B 正确.

4. ABD 【解析】由于点数的和出现的可能性不相等, 故 A 不是古典概型, 符合题意;

样本点的个数是无限的, 故 B 不是古典概型, 符合题意;

路线的数量是有限的, 且选择每条路线的可能性相等, 满足有限性和等可能性, 故 C 是古典概型, 不符合题意;

样本点既不是有限个也不具有等可能性, 故 D 不是古典概型, 符合题意.

5. B 【解析】样本空间为 $\{(1, 3, 5), (1, 3, 7), (1, 3, 9), (1, 5, 7), (1, 5, 9), (1, 7, 9), (3, 5, 7), (3, 5, 9), (3,$

7,9), (5,7,9) } 共 10 个. 从中任取三条能构成三角形的样本点有 (3, 5, 7), (3, 7, 9), (5, 7, 9), 共 3 个. 所以任取三条能构成三角形的概率为 $\frac{3}{10}$, 故 B 正确.

6. B 【解析】列表如下:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

从表中可以看出, 所有可能出现的结果共有 36 种, 这些结果出现的可能性相等. \therefore 点数之和为“11”的结果共有 2 种, \therefore 点数之和为“11”的概率 $P = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. 故 B 正确.

7. C 【解析】根据题中每个人自第二层开始在每一层离开电梯的可能性相等, 则小明和小华离开电梯的情况有如下 25 种:

小华 \ 小明	2	3	4	5	6
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

若小明和小华不在同一层离开电梯, 有 20 种情况, 则小明和小华不在同一层离开电梯的概率 $P = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. 故 C 正确.

易错警示 对“有序”和“无序”判断不准确而致误

在计算样本点总数时, 如果分不清“有序”和“无序”, 那么就会出现“重算”或“漏算”的错误, 突破这一思维障碍的有效方法是交换次序, 看是否对结果造成影响, 有影响就是“有序”, 无影响就是“无序”. 例如本题, 小明从第二层离开, 小华从第三层离开和小明从第三层离开, 小华从第二层离开应算作 2 个样本点.

8. D 【解析】抛掷一枚骰子, 向上的点数为奇数则甲获胜, 则甲获胜的概率 $P_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 向上的点数为偶数则乙获胜, 则乙获胜的概率 $P_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 甲、乙二人获胜概率相等, 游戏公平, 故 A 错误; 甲、乙两人各写一个数字 1 或 2, 样本点有 (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), 两人写的数字相同甲获胜, 否则乙获胜, 则甲、乙二人获胜概率相等, 均为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, 游戏公平, 故 B 错误;

从一副不含大小王的扑克牌中抽一张, 其中红色扑克牌 26 张, 黑色扑克牌 26 张, 扑克牌是红色的则甲获胜, 扑克牌是黑色的则乙获胜, 则甲、乙二人获胜概率相等, 均为 $\frac{26}{52} = \frac{1}{2}$, 游戏公平, 故 C 错误;

同时抛掷两枚硬币, 恰有一枚正面向上则甲获胜, 两枚都正面向上则乙获胜, 样本点有 (正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反), 则甲获胜的概率 $P_3 = \frac{1}{2}$, 乙获胜的概率 $P_4 = \frac{1}{4}$, 甲、乙二人获胜概率不相等, 游戏不公平, 故 D 正确.

9. ACD 【解析】本题样本点包括黄黄、黄黄白、黄黄红、黄白黄、黄白白、黄白红、黄红黄、黄红白、黄红红、白黄黄、白黄白、白黄红、白白黄、白白白、白白红、白红黄、白红白、白红红、红黄黄、红黄白、红黄红、红白黄、红白白、红白红、红红黄、红红白、红红红共 27 个. 颜色相同, 分全红, 全白, 全黄三种情况, 对应概率为 $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$, 故 A 正确;

颜色不全相同, 对应概率为 $\frac{24}{27} = \frac{8}{9}$, 故 B 错误;

颜色全不相同, 即一红一白一黄, 对应概率为 $\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$, 故 C 正确;

没有出现白球, 对应概率为 $\frac{8}{27}$, 故 D 正确.

10. $\frac{3}{5}$ 【解析】将 3 只白球, 2 只黑球分别编号为白 1, 白 2, 白 3, 黑 1, 黑 2, 从 5 只球中一次摸出 2 只球, 有白 1 白 2、白 1 白 3、白 2 白 3、黑 1 黑 2、白 1 黑 1、白 1 黑 2、白 2 黑 1、白 2 黑 2、白 3 黑 1、白 3 黑 2 共 10 种取法, 摸出的 2 只球颜色不同即一黑一白的情况有 6 种, 故其概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

11. 【解】(1) 将 2 张金卡编号为 1, 2, 4 张银卡编号为 3, 4, 5, 6, 从中不放回地依次随机抽取 2 张, 所有的可能有 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), 共 30 种,

其中满足事件 A 的有 $(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2)$, 共 10 种, 事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

(2) 满足事件 B 的有 $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2), (6,1), (6,2)$, 共 18 种, 事件 B 的概率

$$P(B) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}.$$

重难上分

1. ABC 【解析】

当事件 A, B 互斥时, $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, 故 A 正确;

当事件 A, B 互斥时, $P(A+B) =$

$P(A) + P(B)$, 故 B 正确;

当事件 A, B 不互斥时, $P(A+B) <$

$P(A) + P(B)$, 故 C 正确;

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

由于 $P(AB)$ 非负, 故 D 错误.

2. 0.21 【解析】

设抽到一等品、二等品、三等品的事件分别为 A, B, C , 且事件 A, B, C 之间两两互斥, 则

$$\begin{cases} P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.86, \\ P(B \cup C) = P(B) + P(C) = 0.35, \\ P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1, \end{cases}$$

解方程得抽到二等品的概率

$$P(B) = 0.21.$$

3. $\frac{2}{3}$ 【解析】

在抛掷一颗骰子的试验中, 事件 A 表示“出现不大于 4 的偶数点”, 事件 B 表示“出现小于 5 的点数”, 则 $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$$P(\bar{B}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

因为 A 与 \bar{B} 互斥,

所以事件 $A + \bar{B}$ 的概率为 $P(A +$

$$\bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

4. $\frac{3}{4}$ 【解析】

现有 7 名世界杯志愿者, 其中 A_1, A_2, A_3 通晓日语, B_1, B_2 通晓韩语, C_1, C_2 通晓葡萄牙语, 从中选出通晓日语、韩语、葡萄牙语志愿者各 1 名组成一个小组,

样本点有 $A_1B_1C_1, A_1B_2C_1, A_1B_1C_2, A_1B_2C_2, A_2B_1C_1, A_2B_2C_1, A_2B_1C_2, A_2B_2C_2, A_3B_1C_1, A_3B_2C_1, A_3B_1C_2, A_3B_2C_2$ 共 12 个.

B_1, C_1 不全被选中可分为三种情况.

第一种: B_1 被选中, C_1 未被选中;

第二种: B_1 未被选中, C_1 被选中;

第三种: B_1, C_1 都未被选中.

三种情况发生的概率分别设为 P_1, P_2, P_3 , 则 B_1, C_1 不全被选中的

$$\text{概率 } P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{3}{12} + \frac{3}{12} +$$

$$\frac{3}{12} = \frac{3}{4}.$$

【一题多解】 B_1, C_1 不全被选中的对立事件为 B_1, C_1 全被选中, 其概率设为 P_4 , 则 B_1, C_1 不全被选中的概率 $P = 1 - P_4 = 1 - \frac{3}{12} = \frac{3}{4}$.

5. 【解】

(1) 由题意知派出医生不超过 2 人的概率为 0.56, 从题表中可以看出派出医生不超过 2 人包括三部分, 即 $0.1 + 0.16 + x = 0.56$, 解得 $x = 0.3$.

(2) 由派出医生最多 4 人的概率为 0.96, 得 $0.96 + z = 1, z = 0.04$;

由派出医生最少 3 人的概率为 0.44, 得 $y + 0.2 + z = 0.44, y = 0.44 - 0.2 - 0.04 = 0.2$. 故 $z = 0.04, y = 0.2$.

6. D 【解析】

根据题意, m, n 的情况如下: $(6,6), (6,7), (6,8), (6,9), (7,6), (7,7), (7,8), (7,9), (8,6), (8,7), (8,8), (8,9), (9,6), (9,7), (9,8), (9,9)$, 共 16 种情况.

其中 m, n 满足 $|m-n| \leq 1$ 的情况如下: $(6,6), (6,7), (7,6), (7,7), (7,8), (8,7), (8,8), (8,9), (9,8), (9,9)$, 共 10 种情况, 则两人“心领神会”的概率是 $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. 故

D 正确.

7. B 【解析】

不超过 12 的素数有 2, 3, 5, 7, 11, 共 5 个, 其中任取 2 个数的样本点为: $(2,3), (2,5), (2,7), (2,11), (3,5), (3,7), (3,11), (5,7), (5,11), (7,11)$, 共 10 个, 其中的孪生素数为 $(3,5), (5,7)$, 共 2 个, 故在不超过 12 的素数中, 随机选取 2 个不同的数, 能够组成孪生素数的概率是

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

8. $\frac{7}{31}$ 【解析】

集合 S 的非空子集的个数为 $2^5 - 1 = 31$, 由于 $A \subseteq S$, 若 $x \in A$, 则 $6-x \in A$, 就称子集 A 满足性质 P , 故满足 P 的性质的集合为 $\{3\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{1,3,5\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,3,4,5\}$ 共 7 个, 故所取出的非空子集满足性质 P 的概率 $P_1 = \frac{7}{31}$.

9. 【解】

根据题意, 可以用 (x, y) 来表示得到的点数情况, 则得到的点数有 $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)$, 共 16 种情况.

(1) 记“ $\frac{x}{y}$ 为整数”为事件 A , 则 A

包括 $(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)$, 共 8 种情况, 则事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

(2) 记“ $x-y < 2$ ”为事件 B , 则 B 包

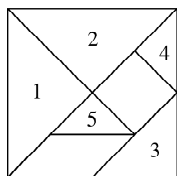
括(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),
(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,
2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),
共13种情况,则事件B的概率

$$P(B) = \frac{13}{16}.$$

52 考点训练

- 1. A** 【解析】根据对立事件和互斥事件的概念,可知对立事件一定是对立事件,两个事件是互斥事件但不一定是对立事件,故A正确;
当A是B的子事件时, $P(AB) = P(A)$,故B错误;
由对立事件的定义,若 $P(A+B) = 1$,只能说明A+B为必然事件,但事件A与B不一定互斥,故C错误;
当A是B的子事件时, $P(A+B) = P(B)$,故D错误.

- 2. C** 【解析】如图所示,5个等腰三角形的面积由大到小分别为1号板 4 dm^2 ,2号板 4 dm^2 ,3号板 2 dm^2 ,4号板 1 dm^2 ,5号板 1 dm^2 ,5个三角形中任取出3个的取法有(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,3,4),(1,3,5),(1,4,5),(2,3,4),(2,3,5),(2,4,5),(3,4,5)共10种,其中3个三角形的面积之和不大于另外2个三角形面积之和的取法有(1,4,5),(2,4,5),(3,4,5)3种取法,则这3个三角形的面积之和不大于另外2个三角形面积之和的概率是 $\frac{3}{10}$.故C正确.



- 3. D** 【解析】将一颗骰子先后抛掷2次,观察向上的点数,将第一次向上的点数记为m,第二次向上的

点数记为n,样本点总数为 $6 \times 6 = 36$, $n < m \leq 2n$ 包含的样本点(m,n)有9个,分别为(2,1),(3,2),(4,2),(4,3),(5,3),(5,4),(6,3),(6,4),(6,5),则 $n < m \leq 2n$ 的概率为 $P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.故D正确.

- 4. ABD** 【解析】方案一:“选到3号球”的概率 $P_1 = \frac{1}{3}$;

方案二:先后摸出2个球共有{1,2},{1,3},{2,3},{2,1},{3,1},{3,2}共6个样本点,“选到3号球”包含{1,3},{2,3},{2,1}共3个样本点,所以“选到3号球”的概率 $P_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$;

方案三:同时摸出2个球共有{1,2},{1,3},{2,3}共3个样本点,“选到3号球”包含{1,3},{2,3}共2个样本点,所以 $P_3 = \frac{2}{3}$.

所以 $P_1 < P_2, P_1 < P_3, P_2 < P_3, 2P_1 = P_3$.故ABD正确.

- 5. AB** 【解析】设 A_1, A_2, A_3 表示3支黑色圆珠笔, B_1, B_2 表示2支红色圆珠笔,C表示1支蓝色圆珠笔,从这6支不同的圆珠笔中任取2支,则样本空间 $\Omega = \{(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_1, C), (A_2, A_3), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (A_2, C), (A_3, B_1), (A_3, B_2), (A_3, C), (B_1, B_2), (B_1, C), (B_2, C)\}$,共15个样本点.

可知2支都是黑色圆珠笔的概率为 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$;

1支是黑色圆珠笔,1支是蓝色圆珠笔的概率为 $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$;

2支都是红色圆珠笔的概率为 $\frac{1}{15}$;

2支中恰有1支是黑色圆珠笔的

概率为 $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$.故AB正确.

- 6. ABD** 【解析】将2个红球和2个黑球分别编号为红1,红2,黑1,黑2,从装有2个红球和2个黑球的口袋中任取2个小球,有红1黑1、红1黑2、红2黑1、红2黑2、红1红2、黑1黑2共6种取法.

“至少1个红球”有5种取法,则“至少1个红球”的概率为 $\frac{5}{6}$,故A正确;

“恰有1个黑球”有4种取法,则“恰有1个黑球”的概率为 $\frac{2}{3}$,故B正确,C错误;

“2个都是红球”有1种取法,则“2个都是红球”的概率为 $\frac{1}{6}$,故D正确.

- 7. $\frac{2}{3}$** 【解析】设事件A=甲拿到橙色菊花,根据题意有红色、黄色、橙色菊花各1盆,分别赠送给甲、乙、丙三人,每人1盆,甲、乙、丙三人拿到橙色菊花概率相等,都为 $\frac{1}{3}$,

所以 $P(A) = \frac{1}{3}$,则甲没有拿到橙色菊花的概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

- 8. $\frac{1}{5}$** 【解析】设正六边形的6个顶点分别为A,B,C,D,E,F,则从6个顶点中任取4个共有15种取法,所取4个点可以作为矩形4个顶点的取法有3种,所以概率为 $\frac{1}{5}$.

- 9. 【解】**(1)由题意得,至多2人排队表示有可能0人、1人、2人排队,由互斥事件的概率加法公式可得等候的概率为 $0.1 + 0.16 + 0.3 =$

0.56.

(2) 至少 2 人排队表示有可能 2 人、3 人、4 人、5 人及以上排队, 由互斥事件的概率加法公式可得等候的概率为 $0.3 + 0.3 + 0.1 + 0.04 = 0.74$.

10. 【解】(1) 点 (x, y) 的 $x \in A, y \in A$, 且 $x \neq y$, 故 x 有 10 种可能, y 有 9 种可能, 所以试验的所有结果有 $10 \times 9 = 90$ (种), 且每一种结果出现的可能性相等.

设事件 A 为“点 (x, y) 不在 x 轴上”, 若点 (x, y) 不在 x 轴上, 则 y 不为 0, 有 9 种可能, 由于 $x \neq y$, 则 x 有 9 种情况. 事件 A 包含的样本点, 个数为 $9 \times 9 = 81$, 则事件 A 的概率 $P(A) = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$.

(2) 设事件 B 为“点 (x, y) 正好在第二象限”, 即 $x < 0, y > 0$, x 有 5 种可能, y 有 4 种可能, 事件 B 包含的样本点, 个数为 $5 \times 4 = 20$, 因此, 事件 B 的概率 $P(B) = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$.

11. 【解】(1) \therefore 用分层随机抽样的方法从这 1 000 株树木中随机抽取 100 株, \therefore 应该抽取银杏树 $100 \times \frac{400}{1\,000} = 40$ (株), \therefore 有 $4 + 18 + x + 6 = 40$, $\therefore x = 12$.

(2) 记这 4 株树为树₁, 树₂, 树₃, 树₄, 且不妨设树₄ 为患虫害的树, 记排查的树木恰好为 2 株为事件 A , 即恰好在排查到第 2 株时发现患虫害树为事件 A , 则 A 是指第 2 次排查到的是树₄.

\therefore 求恰好在排查到第 2 株时发现患虫害树的概率, \therefore 样本空间 $\Omega = \{(\text{树}_1, \text{树}_2), (\text{树}_1, \text{树}_3), (\text{树}_1, \text{树}_4), (\text{树}_2, \text{树}_1), (\text{树}_2, \text{树}_3), (\text{树}_2, \text{树}_4), (\text{树}_3, \text{树}_1), (\text{树}_3, \text{树}_2), (\text{树}_3,$

$\text{树}_4), (\text{树}_4, \text{树}_1), (\text{树}_4, \text{树}_2), (\text{树}_4, \text{树}_3)\}$, 共 12 个样本点, 因此事件 A 中包含的样本点有 3 个, \therefore 恰好在排查到第 2 株时发现患虫害树的概率 $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

12. 【解】(1) \therefore 在全体样本中随机抽取 1 个, 抽到 B 组疫苗有效的概率是 0.33, $\therefore \frac{x}{2\,000} = 0.33$, $\therefore x = 660$.

(2) C 组样本个数是 $y + z = 2\,000 - (673 + 77 + 660 + 90) = 500$, 用分层随机抽样的方法在全体样本中抽取 360 个测试结果, 应在 C 组抽取的个数为 $360 \times \frac{500}{2\,000} = 90$.

(3) 由题意知本题是一个古典概型, C 组疫苗有效与无效的可能情况有 $\{(465, 35), (466, 34), (467, 33), (468, 32), (469, 31), (470, 30)\}$, 共有 6 个样本点, 由题意知疫苗有效的概率小于 90%, 即疫苗无效的概率大于 10%, 认为不能通过测试, 则需满足 $77 + 90 + z > 2\,000 \times 10\%$, 即 $z > 33$, 故满足条件的样本点是 $(465, 35), (466, 34)$, 共有 2 个, 故不能通过测试的概率 $P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

§3 频率与概率

基础满分

1. D 【解析】 频率不直接等于概率, 故 A 错误; 频率受试验次数的变化而变化, 故 B 错误; 概率是理论数据不是随机的, 且概率是试验次数足够多时频率的近似值, 故 C 错误; 随着试验次数的增加, 频率一般

会越来越接近概率, 故 D 正确.

易错警示 对频率与概率的关系辨析不清致误

概率定义中用频率的稳定值刻画概率, 要求试验次数足够多, 即只有在相同条件下, 随着试验次数的增加, 随机事件发生的频率在某个常数附近摆动并趋于稳定时, 才用这个常数来刻画该随机事件发生的可能性的概率.

2. B 【解析】 由题可知, 试验次数越多, 频率越接近概率, 对可能性的估计误差越小, 可能性越大, 所以合计列对应的频率最为合适, 即 0.61. 故 B 正确.

3. D 【解析】 袋中装有大小和质地都相同的 3 个红球和 2 个黄球, 从中随机取 1 个, 取到红球的概率为 $\frac{3}{5}$, 不符合题意, 故 A 错误; 掷一枚骰子, 向上的面的点数是偶数的概率为 $\frac{1}{2}$, 不符合题意, 故 B 错误; 先后两次掷一枚质地均匀的硬币, 两次都出现反面的概率为 $\frac{1}{4}$, 不符合题意, 故 C 错误; 先后两次掷一枚质地均匀的骰子, 两次向上的面的点数之和是 7 或超过 9 的概率为 $\frac{1}{3}$, 符合题意, 故 D 正确.

4. AD 【解析】 抽出的样本中次品率为 $\frac{1}{10}$, 即事件 C 发生的概率为 $\frac{1}{10}$, 多次测得的频率围绕概率上下波动, 故事件 C 发生的频率接近 $\frac{1}{10}$, 不一定等于 $\frac{1}{10}$. 概率描述的只是可能性, 所以每抽 10 台电视机,

不一定有 1 台次品. 故 AD 错误, 符合题意.

5. D 【解析】抛掷两枚硬币, 可能出现的结果为 (正, 反), (正, 正), (反, 正), (反, 反), 所以事件“一枚正面, 一枚反面”发生的概率 $P = \frac{1}{2}$, 故 A 错误;

“抛掷十枚硬币, 正面都朝上”没有发生, 不能说明 $P(B) = 0$, 应有 $P(B) = \frac{1}{2^{10}}$, 故 B 错误;

抛掷 100 次硬币, 事件 A 发生的频率与抛掷 50 次事件 A 发生的频率不能判断谁更接近于 0.5, 故 C 错误;

根据频率与概率的关系知, 当抛掷次数足够多时, 事件 A 发生的频率接近于 0.5, 故 D 正确.

6. $\frac{2}{5}$ 【解析】由表中数据可得, 四天中恰有三天下雨的有 9533, 9522, 0018, 0018, 3181, 8425, 2436, 0753, 共 8 组, 所以估计四天中恰有三天下雨的概率的近似值为 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

7. 300 【解析】由表中数据知, 最高气温低于 25°C 的频率为 $\frac{4+5}{90} = 0.1$, 且由题意可知, 最高气温低于 25°C 时, 这种冷饮一天的需求量不超过 300 瓶, 所以 6 月份这种冷饮一天的需求量不超过 300 瓶的概率估计值为 0.1, 即 $x = 300$.

8. 【解】(1) 因为该地区观看亚运会开幕式的学生的频率为 $0.5 + 0.2 + 0.1 = 0.8$, 所以该地区观看亚运会开幕式的学生人数估计为 $10\,000 \times 0.8 = 8\,000$.

(2) 设事件 A 为从该地区所有学生中随机抽取 1 人, 该学生观看了亚运会开幕式. 由频率估计概率,

得 $P(A) = 1 - 0.2 = 0.8$.

9. 【解】(1) 由题意知, $(0.005 + a + 0.020 + 0.040 + 0.020 + 0.005) \times 10 = 1$, 解得 $a = 0.010$.

(2) 由频率分布直方图知, 身高区间 $[140, 150)$, $[150, 160)$, $[160, 170)$, $[170, 180)$, $[180, 190)$, $[190, 200]$ 的频率分别为 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.05, 故众数为 $\frac{170+180}{2} = 175$ cm, 学生身高的平均数为 $145 \times 0.05 + 155 \times 0.1 + 165 \times 0.2 + 175 \times 0.4 + 185 \times 0.2 + 195 \times 0.05 = 172.5$ cm.

(3) 由题中频率分布直方图知, 身高在 $[140, 150)$, $[150, 160)$, $[160, 170)$ 区间内的频率分别为 0.05, 0.1, 0.2, 则估计身高在 170 cm 以下的概率为 $0.05 + 0.1 + 0.2 = 0.35$.

10. 【解】(1) 根据表格数据可以看出, 在 40 天中, 有 15 个“+”, 也就是有 15 天的价格是“上涨”的, 根据古典概型的计算公式, 该茶品价格“上涨”的概率为 $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$;

有 15 个“-”, 也就是有 15 天的价格是“下跌”的, 根据古典概型的计算公式, 该茶品价格“下跌”的概率为 $\frac{15}{40} = \frac{3}{8}$;

有 10 个“0”, 也就是有 10 天的价格是“不变”的, 根据古典概型的计算公式, 该茶品价格“不变”的概率为 $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

(2) 由于第 40 天处于“上涨”状态, 从前 39 天的 14 次“上涨”进行分析, “上涨”后下一次仍“上涨”的有 4 次, “不变”的有 8 次, “下跌”的有 2 次, 因此估计第 41 天“不变”的概率最大.

S4 事件的独立性

基础满分

1. C 【解析】因为对于任意两个事件 A, B, 如果 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, 则事件 A 与事件 B 相互独立, 若事件 A 与事件 B 相互独立, 则事件 A 与事件 \bar{B} 也互相独立, 所以充分性成立;

若事件 A 与事件 \bar{B} 互相独立, 则事件 A 与事件 B 也相互独立, 则 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 成立, 所以必要性成立. 故“ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ”是“事件 A 与事件 \bar{B} 互相独立”的充要条件. 故 C 正确.

2. B 【解析】根据题意, 可得 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 由于事件 $ABC = \emptyset$, 即 $P(ABC) = 0$, 所以 $P(ABC) \neq P(A)P(B)P(C)$, 可知 A, B, C 不相互独立, 故 A 错误;

由 $P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, 可得 A, B 相互独立, 同理可得 B, C 相互独立, 且 A, C 相互独立, 即事件 A, B, C 两两独立. 结合 A 的结论, 故 B 正确, C 错误;

事件 A, B 可以同时发生, 故事件 A, B 并不互斥, 故 D 错误.

3. C 【解析】由题意可知, 事件 $A = \{1, 2\}$, 事件 $B = \{2, 3, 4\}$, 样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 则 $\bar{B} = \{1, 5, 6\}$, 因为 $AB = \{2\} \neq \emptyset$, 所以事件 A, B 不互斥, 且不对立, 故 A, B 错误;

因为 $\bar{A}B = \{1\}$, 则 $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(AB) = \frac{1}{6}$,

$P(\bar{B}) = \frac{1}{2}$, $P(A\bar{B}) = \frac{1}{6}$, 可得

$P(AB) = P(A)P(B)$, $P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B})$, 所以事件 A, B 相互独立, 事件 A 与 \bar{B} 相互独立, 故 C 正确, D 错误.

4. D 【解析】两次取出的球的数字之和为 8, 有 $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ 共 5 种情况, $P(\text{丙}) = \frac{5}{6 \times 6} = \frac{5}{36}$; 两次取出的球的数字之和为 7, 有 $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ 共 6 种情况, $P(\text{丁}) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$;

$$P(\text{甲}) = P(\text{乙}) = \frac{1}{6}.$$

$P(\text{丙丁}) = 0 \neq P(\text{丙})P(\text{丁})$, 故 A 错误; $P(\text{甲丙}) = \frac{1}{36} \neq P(\text{甲}) \cdot P(\text{丙})$, 故 B 错误;

$P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36} \neq P(\text{乙})P(\text{丙})$, 故 C 错误;

$P(\text{乙丁}) = \frac{1}{36} = P(\text{乙})P(\text{丁})$, 故 D 正确.

5. A 【解析】由题意知 A 与 B 相互独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B) = 0.2 \times 0.7 = 0.14$. 故 A 正确.

6. D 【解析】由题知, 甲、乙两球都不落入盒子的概率为 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 所以甲、乙两球至少有一个落入盒子的概率为 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. 故 D 正确.

7. AB 【解析】2 个球都是红球的概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, 故 A 正确; 2 个球中恰有 1 个红球的概率为 $\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 故 B 正确; 2 个球都不是红球的概率为

$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$, 至少有 1 个红球的概率为 $\frac{2}{3}$, 故 C 错误;

2 个球不都是红球的概率为 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, 故 D 错误.

8. $\frac{1}{2}$ 【解析】该线路是通路的情况有 A 闭合 B 不闭合, B 闭合 A 不闭合, A, B 都闭合三种情况, 所以 $P = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

【一题多解】该线路不是通路的概率为 $P_1 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$, 所以该线路是通路的概率 $P = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

9. 13 【解析】由题意可知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(ABC) = \frac{1}{8}$, 可见 $\{1\}$ 是 A, B, C 共同且唯一的样本点, 则 m, n 不为 2, 3, 又因为 A, B, C 两两不独立, 即 $P(AB) \neq \frac{1}{4}$, $P(AC) \neq \frac{1}{4}$, $P(BC) \neq \frac{1}{4}$, 可见 m, n 不为 4, 5, 所以 m, n 为 6, 7, 则 $m+n=13$.

10. 【解】设事件 $B_i (i=0, 1, 2, 3)$ 表示“目标被 i 人击中”; 事件 $H_j (j=1, 2, 3)$ 表示“目标被第 j 人击中”.

由题意可知, $P(H_1) = 0.5$, $P(H_2) = 0.6$, $P(H_3) = 0.7$, 可得 $P(\bar{H}_1) = 1 - P(H_1) = 0.5$, $P(\bar{H}_2) = 1 - P(H_2) = 0.4$, $P(\bar{H}_3) = 1 - P(H_3) = 0.3$, 所以 $P(B_2) = P(H_1 H_2 \bar{H}_3 \cup H_1 \bar{H}_2 H_3 \cup \bar{H}_1 H_2 H_3)$
 $= P(H_1 H_2 \bar{H}_3) + P(H_1 \bar{H}_2 H_3) +$

$$\begin{aligned} & P(\bar{H}_1 H_2 H_3) \\ &= 0.5 \times 0.6 \times 0.3 + 0.5 \times 0.4 \times 0.7 + \\ & 0.5 \times 0.6 \times 0.7 \\ &= 0.09 + 0.14 + 0.21 \\ &= 0.44. \end{aligned}$$

易错警示 考虑问题不全面而致误

求解较复杂问题的概率时, 常因事件考虑不全面而导致错误. 解决此类问题一般采取“大化小”的解决策略, 即将“大”的事件问题化为“小”的事件的和事件问题, 转化时要做到不重不漏.

11. 【解】(1) 根据题意, 他在科目 A 考试合格的概率为 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$, 则他在科目 B 考试第一次合

格的概率为 $\frac{15}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{15}{32}$.

(2) 根据题意, 他考试的次数为 2 且获得证书的概率 $P_1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$;

他考试的次数为 3 且获得证书的概率 $P_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$;

他考试的次数为 4 且获得证书的概率 $P_3 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{64}$.

所以他可获得证书的概率为 $\frac{3}{8} + \frac{9}{32} + \frac{3}{64} = \frac{45}{64}$.

12. 【解】(1) 记“甲同学回答正确这道题”“乙同学回答正确这道题”“丙同学回答正确这道题”分别为事件 A, B, C , 则 $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(\bar{A})P(\bar{C}) = \frac{1}{20}$, $P(B) \cdot P(C) =$

$\frac{8}{15}$, 解得 $P(C) = \frac{4}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$,
所以乙、丙两名同学各自回答正确这道题的概率为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{4}{5}$.

(2) 三名同学都回答错误这道题的概率 $P_0 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60}$;

有 1 名同学回答正确这道题的概率 $P_1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20}$.

所以不少于 2 名同学回答正确这道题的概率 $P = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{1}{60} - \frac{9}{60} = \frac{5}{6}$.

§3 & §4 考点训练

1. B 【解析】某人将一枚质地均匀的正方体骰子连续抛掷了 100 次, 出现 6 点的次数为 19, 则出现 6 点的频率为 $\frac{19}{100} = 0.19$. 故 B 正确.

2. C 【解析】由题意可知

$$\begin{cases} p_1(1-p_2) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}, \\ p_2\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}, \\ p_2 = \frac{2}{3}. \end{cases} \quad \text{故 C 正确.}$$

3. B 【解析】按先后顺序抛掷两枚质地均匀的硬币, 事件“恰好出现一次正面”的概率 $P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 则事件“恰好出现一次正面”的自信息为 $\log_2 \frac{1}{P} = \log_2 2 = 1$. 故 B 正确.

4. D 【解析】一批产品的次品率为 0.05, 则从中任取 200 件, 次品的件数在 10 件左右, 而不一定是 10

件, 故 A 错误;
100 次并不是无穷多次, 只能说明这 100 次试验出现正面朝上的频率为 $\frac{51}{100} = 0.51$, 故 B 错误;

根据定义, 随机事件的频率只是概率的近似值, 并不等于概率, 故 C 错误;

频率为事件出现的次数与重复试验的次数的比值, 抛掷骰子 100 次, 得点数为 6 的结果有 20 次, 则出现 6 点的频率是 $\frac{20}{100} = 0.2$, 故 D 正确.

5. B 【解析】设甲第 i 局获胜为事件 A_i , $i = 1, 2, 3$, 则甲恰好连胜两局的概率为 $P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{36}$. 故 B 正确.

6. B 【解析】分别抛掷 3 枚质地均匀的硬币, 样本空间 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$, 共 8 个样本点. 事件 $M =$ “至少有 2 枚正面朝上”, 则 $M = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{正})\}$, 共 4 个样本点, 则 $P(M) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

设 $A =$ “3 枚硬币都正面朝上”, 则 $A = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正})\}$, 即 $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(AM) = \frac{1}{8}$, $P(AM) \neq P(A) \cdot P(M)$, 故 A 错误;

设 $B =$ “有正面朝上的, 也有反面朝上的”, 则 $B = \{(\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正})\}$, $P(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, $P(BM) = \frac{3}{8}$,

即 $P(BM) = P(B) \cdot P(M)$, 则事件 B 与事件 M 相互独立, 故 B 正确;
设 $C =$ “恰好有 1 枚反面朝上”, 则 $C = \{(\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{正})\}$, $P(C) = \frac{3}{8}$,

$P(CM) = \frac{3}{8}$, $P(CM) \neq P(C) \cdot P(M)$, 故 C 错误;

设 $D =$ “至多有 2 枚正面朝上”, 则 $D = \{(\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$, $P(D) = \frac{7}{8}$, $P(DM) = \frac{3}{8}$, $P(DM) \neq P(D)P(M)$, 故 D 错误.

7. C 【解析】记小刚解答 A, B, C 三道题正确分别为事件 D, E, F , 且 D, E, F 相互独立, $P(D) = P(E) = a$, $P(F) = \frac{1}{2}$, 则恰好能答

对两道题为事件 $DE\bar{F} + D\bar{E}F + \bar{D}EF$, 且 $DE\bar{F}, D\bar{E}F, \bar{D}EF$ 两两互斥, 所以

$$\begin{aligned} P(DE\bar{F} + D\bar{E}F + \bar{D}EF) &= P(DE\bar{F}) + P(D\bar{E}F) + P(\bar{D}EF) = \\ &= P(D)P(E)P(\bar{F}) + P(D)P(\bar{E}) \cdot P(F) + P(\bar{D})P(E)P(F) = \\ &= a \times a \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + a \times (1-a) \times \frac{1}{2} + (1-a) \times a \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

整理得 $(1-a)^2 = \frac{1}{2}$.

他三道题都答错为事件 $\bar{D}\bar{E}\bar{F}$, $P(\bar{D}\bar{E}\bar{F}) = P(\bar{D})P(\bar{E})P(\bar{F}) = (1-a)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} (1-a)^2 = \frac{1}{4}$. 故 C 正确.

8. $\frac{14}{15}$ 【解析】记事件 $A =$ “这道题没被解出来”, 则 $P(A) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times$

$\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{15}$, 故这道题被解出(至少有一人解出来)的概率 $P=1-P(A)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$.

9. $\frac{3}{4}$ 【解析】当李雷连胜 2 局或韩梅梅连胜 2 局时, 第二局比赛结束时比赛停止, 即 $P^2+(1-P)^2=\frac{5}{8}$, 解得 $P=\frac{1}{4}$ 或 $P=\frac{3}{4}$. $\because P>\frac{1}{2}$, $\therefore P=\frac{3}{4}$.

10. $\frac{2}{27}$ $\frac{13}{27}$ 【解析】由题意, 前 3 次射击中甲恰好击中 2 次, 即前 2 次甲都击中目标, 但第三次没有击中目标, 故概率为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$.
第 4 次由甲射击包括甲连续射击 3 次且都击中; 第一次甲射击击中, 但第二次没有击中, 第三次由乙射击但没有击中; 第一次甲射击没有击中, 且乙射击第二次击中, 但第三次没有击中; 第一次甲射击没有击中, 且乙射击第二次没有击中, 第三次甲射击击中, 故第 4 次由甲射击的概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{27}$.

11. 【解】(1) 因为 $(0.025+a+0.40+0.35+0.05)\times 1=1$, 所以 $a=0.175$. 由题中频率分布直方图可知, 估计该校高一学生该天睡眠时间不少于 9 小时的频率为 $(0.35+0.05)\times 1=0.40$.
(2) 从该校高一学生中随机抽取 2 人, 用频率估计概率, 这两位学

生该天睡眠时间都小于 9 小时的概率为 $(1-0.4)^2=0.36$, 所以至少有 1 人该天睡眠时间不小于 9 小时的概率为 $1-0.36=0.64$.

12. 【解】(1) 设事件 A 表示“甲获得该高校综合评价录取资格”, 则 $P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.
(2) 设事件 B 表示“乙获得该高校综合评价录取资格”, 则 $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, 则甲、乙两位考生中有且只有一位考生获得该高校综合评价录取资格的概率 $P=P(\overline{A}B+\overline{B}A)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$.
(3) 设事件 C 表示“丙获得该高校综合评价录取资格”, 则 $P(C)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$, 三人中至少有一人获得该高校综合评价录取资格的对立事件是三人都没有获得该高校综合评价录取资格, 所以三人中至少有一人获得该高校综合评价录取资格的概率 $P=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{91}{216}$.

13. 【解】(1) 由题意可得, 记选择方案一, 甲获胜的事件为 A . 事件 A 包含甲连胜两局, 记为 A_1 ; 甲第一局负, 第二、三局胜, 记为 A_2 ; 甲第一局胜, 第二局负, 第三局胜, 记为 A_3 . A_1, A_2, A_3 互斥, 且每局比赛相互独立, 则

$$P(A_1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}; P(A_2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}; P(A_3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}.$$

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\frac{20}{27},$$

即甲获胜的概率

为 $\frac{20}{27}$.

(2) 抛掷两枚质地均匀的骰子, 设向上的点数为 (a, b) , 共有 36 个样本点, 为

$(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (5,3), (6,3), (1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4), (1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5), (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)$. 两点数之和不大于 6 的样本点有 15 个, 为 $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)$. 记事件 C 为“两点数之和不大于 6”, 则 $P(C)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$.

记事件 D 为“点数之和大于 6”, 则 $P(D)=1-P(C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$.

$\because P(C)<P(D)$, \therefore 方案二被选择的可能性更大.

985 冲刺专题八 统计与概率综合问题

1. BCD 【解析】A 选项中共有 10 个数据, $10\times 0.25=2.5$, 则该组数据的 25% 分位数为 3, A 错误;
设数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均数为 \bar{x} , 则数据 $ax_1+b, ax_2+b, \dots, ax_n+b$ 的平均数为 $(ax_1+b)+(ax_2+b)+\dots+(ax_n+b)\times\frac{1}{n}=a\bar{x}+b$, 方差为 $\frac{1}{n}[(ax_1-a\bar{x})^2+(ax_2-a\bar{x})^2+\dots+(ax_n-a\bar{x})^2]=a^2\cdot\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2]=a^2s_x^2$, 所

以标准差为 $\sqrt{a^2 \cdot s_x^2} = |a| s_x$, B 正确;

由于三个事件 A, B, C 两两互斥, 根据互斥事件的概率加法公式, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$, C 正确;

根据事件独立性的定义, D 正确.

2. $\frac{2}{9}$ 【解析】根据题意, 随机数中只有 021, 001, 130, 031 共 4 种情况符合要求, 则可以估计恰好抽取三次就停止的概率为 $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$.

3. ③ 【解析】平均数受少数几个极端值的影响, 中位数不受少数几个极端值的影响, 故①错误; 抛掷两枚硬币, 出现“两枚都是正面朝上”的概率为 $\frac{1}{4}$, “两枚都是反面朝上”的概率为 $\frac{1}{4}$, “恰好一枚硬币正面朝上”的概率为 $\frac{1}{2}$, 故

②错误;

用样本的频率分布估计总体分布的过程中, 样本容量越大, 估计越准确, 故③正确;

向一个圆面内随机地投一个点, 该点落在圆内任意一点都是等可能的, 但圆内有无数个点, 不满足古典概型的有限性, 故④错误.

4. ①③ 【解析】男生应抽取 $10 \times \frac{30}{30+20} = 6$ 人, 故①正确;

某人将一枚质地均匀的硬币连续抛掷了 10 次, 正面朝上的情形出现了 6 次, 则正面朝上的频率为 0.6, 但是无论抛掷硬币多少次, 硬币正面朝上的概率均为 0.5, 故

②错误;

这组数据从小到大排列依次为 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 因为 $10 \times 75\% = 7.5$, 所以这组数据的 75% 分位数为 4, 故③正确.

5. 【解】(1) 设该城市人口总数为 a , 则该城市人均 GDP 为

$\frac{1}{a}(8\ 000 \times 0.25a + 4\ 000 \times 0.30a + 6\ 000 \times 0.15a + 3\ 000 \times 0.10a + 10\ 000 \times 0.20a) = 6\ 400$ 美元, 因为 $6\ 400 \in [4\ 046, 12\ 535]$, 所以该城市人均 GDP 达到了中等偏上收入国家标准.

(2) “从 5 个行政区中随机抽取 2 个”的所有样本点为 $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{D, E\}$, 共 10 个.

设事件 M 为“抽到的 2 个行政区人均 GDP 至少有一个没达到中等偏上收入国家标准”, 则事件 M 包含的样本点为 $\{A, B\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{C, D\}, \{D, E\}$, 共 7 个, 所以所求概率为

$$P(M) = \frac{7}{10} = 0.7.$$

6. 【解】(1) 甲班样本数据的平均值为 $\frac{1}{5} \times (8+13+18+22+26) = 17.4$, 由此估计甲班学生每周平均熬夜时长为 17.4 小时; 乙班样本数据的平均值为 $\frac{1}{5} \times (12+17+16+24+26) = 19$, 由此估计乙班学生每周平均熬夜时长为 19 小时.

(2) 由题知, 甲班“过度熬夜”的有 3 人, 记为 a, b, c ; 乙班“过度熬夜”的有 2 人, 记为 d, e . 从中任取 2

人, 有 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$, 共 10 个样本点, 其中都来自甲班的有 ab, ac, bc , 共 3 个样本点, 所以所求概率 $P = \frac{3}{10}$.

7. 【解】(1) 由频率分布直方图得第七组的频率为

$$1 - (0.004 + 0.012 + 0.016 + 0.030 + 0.020 + 0.006 + 0.004) \times 10 = 0.080.$$

(2) 估计该地区 500 名学生这次考试成绩的平均分为 $70 \times 0.004 \times 10 + 80 \times 0.012 \times 10 + 90 \times 0.016 \times 10 + 100 \times 0.030 \times 10 + 110 \times 0.020 \times 10 + 120 \times 0.006 \times 10 + 130 \times 0.008 \times 10 + 140 \times 0.004 \times 10 = 102$.

(3) 由频率分布直方图可知在 $[95, 105)$ 内的频数为 $500 \times 0.030 \times 10 = 150$, 在 $[105, 115)$ 内的频数为 $500 \times 0.020 \times 10 = 100$, 所以两组人数的比值为 3:2, 按照分层随机抽样抽取 5 人, 则在 $[95, 105)$, $[105, 115)$ 内分别抽取 3 人和 2 人, 记 $[95, 105)$ 这组三人的编号为 A, B, C , $[105, 115)$ 这组两人的编号为 a, b , 故从 5 人中随机抽取 2 名, 共有样本点 $(A, B), (A, C), (C, B), (A, a), (A, b), (B, a), (B, b), (C, a), (C, b), (a, b)$, 共 10 个样本点. 设事件 $M =$ “从 5 个人中随机抽取两人, 抽取到的两人不在同一组”, 则 $M = \{(A, a), (A, b), (B, a), (B, b), (C, a), (C, b)\}$, 共 6 个样本点.

故 $P(M) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, 即从这 5 个人中随机抽取两人, 则抽取到的两人不在同一组的概率为 $\frac{3}{5}$.

第七章 综合检测

1. A 【解析】“守株待兔”有可能发生, 有可能不发生, 是随机事件;

“瓮中捉鳖”一定会发生, 是必然事件; “水中捞月”不可能发生, 是

不可能事件; “水滴石穿”一定会发生, 是必然事件. 故 A 正确.

2. D 【解析】抽到男同学名字的可能性是 $22 \div (22+20) \approx 52\%$, 故 A 错误;

抽到女同学名字的可能性是 48% , 故 B 错误;

由于抽到男同学的可能性更大, 所以抽到男同学名字的可能性大于抽到女同学名字的可能性, 故 C 错误, D 正确.

3. B 【解析】由题图可知, 小球下落的路线有 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E$, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F$, $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G$, $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow H$, 共四种, 且每种路线的可能性都相等, 所以小球从 F 出口落出的概率为 $\frac{1}{4}$. 故 B 正确.

4. B 【解析】在一个不透明的袋中有 4 个红球和 n 个黑球, 现从袋中有放回地随机摸出 2 个球, \therefore 取出的球中至少有一个红球的概率为 $\frac{8}{9}$, \therefore 取出的球中没有红球的概率为 $\frac{n^2}{(n+4)^2} = 1 - \frac{8}{9}$, $\therefore 9n^2 = (n+4)^2$, $\therefore (2n-4)(4n+4) = 0$, 解得 $n=2$ (负值舍去). 故 B 正确.

5. B 【解析】所有的两位正整数共有 90 个, 其中被 2 整除的有 10, 12, 14, \dots , 98, 共计 45 个; 被 3 整除的有 12, 15, 18, \dots , 99, 共计 30 个; 被 6 整除的有 12, 18, 24, \dots , 96, 共计 15 个. 故能被 2 或 3 整除的正整数有 $45+30-15=60$ 个, 故任取一个数, 这个数能被 2 或 3 整除的概率为 $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$. 故 B 正确.

6. C 【解析】抛掷一枚质地均匀的硬币出现正面向上的概率为 $\frac{1}{2}$, 则每人发球的概率都是 $\frac{1}{2}$, 规则一公平;

记 2 个红球分别为红 1, 红 2, 2 个黑球分别为黑 1, 黑 2, 则随机取出 2 个球的所有可能的情况有 (红 1,

红 2), (红 1, 黑 1), (红 1, 黑 2), (红 2, 黑 1), (红 2, 黑 2), (黑 1, 黑 2), 共 6 种, 其中同色的情况有 2 种, 所以甲发球的可能性为 $\frac{1}{3}$,

乙发球的可能性为 $\frac{2}{3}$, 规则二不公平;

记 3 个红球分别为红 1, 红 2, 红 3, 则随机取出 2 个球所有可能的情况有 (红 1, 红 2), (红 1, 红 3), (红 1, 黑), (红 2, 红 3), (红 2, 黑), (红 3, 黑), 共 6 种, 其中同色的情况有 3 种, 所以两人发球的可能性均为 $\frac{1}{2}$, 规则三公平. 所以对

甲、乙公平的是规则一和规则三. 故 C 正确.

7. D 【解析】第一枚正面朝上的概率是 $P(A) = \frac{1}{2}$, 故 A 错误;

三枚硬币朝上的面相同的概率是

$$P(B) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ 又由}$$

$$P(AB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \text{ 可得}$$

$P(AB) = P(A)P(B)$, 故“第一枚正面朝上”与“三枚硬币朝上的面相同”相互独立, 故 B 错误;

“至少一枚正面朝上”与“三枚硬币正面都朝上”, 可能同时发生, 所以两个事件不互斥, 故 C 错误;

“至少一枚正面朝上”与“三枚硬币反面都朝上”, 不能同时发生, 但试验中必有其中一个事件发生, 所以两事件对立, 故 D 正确.

8. D 【解析】小明连对两题, 则第二题为必对题. 若小明做的第二题为第 8 题, 则做题顺序为 12, 8, 16 或 16, 8, 12, 且这两种情况的概率均为 $\frac{1}{2}$, 记此时连对两题的概率为

$$P_8, \text{ 则 } P_8 = \frac{1}{2} \times [(1-p_2)p_1p_3 +$$

$$p_1p_2(1-p_3)] + \frac{1}{2} \times [(1-p_3)p_1p_2 +$$

$$p_3p_1(1-p_2)] = p_1(p_2+p_3) - 2p_1p_2p_3;$$

同理, 若小明做的第二题为第 12 题, 记连对两题的概率为 P_{12} , 则

$$P_{12} = p_2(p_1+p_3) - 2p_1p_2p_3;$$

若小明做的第二题为第 16 题, 记连对两题的概率为 P_{16} , 则 $P_{16} =$

$$p_3(p_1+p_2) - 2p_1p_2p_3.$$

所以 $P_8 - P_{12} = p_1(p_2+p_3) - 2p_1p_2p_3 - [p_2(p_1+p_3) - 2p_1p_2p_3] = (p_1-p_2)p_3 < 0$, $P_{12} - P_{16} = p_2(p_1+p_3) - 2p_1p_2p_3 - [p_3 \cdot (p_1+p_2) - 2p_1p_2p_3] = (p_2-p_3) \cdot p_1 < 0$, 则 $P_8 < P_{12}$, $P_{12} < P_{16}$, 所以小明第 16 题定为次序 2 时, P 最大, 故 D 正确.

9. AC 【解析】从数学兴趣小组的 6 名学生中, 任选两名学生去参加数学竞赛, 易知共有 15 种可能结果.

恰有一名参赛学生是男生, 即从 3 名男生中任选 1 人, 从 3 名女生中任选 1 人, 有 $3 \times 3 = 9$ 种选法, 所以恰有一名参赛学生是男生的概率

$$P = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \text{ 故 A 正确;}$$

“至少有一名参赛学生是男生”的对立事件是“两名参赛学生都是女生”, 从 3 名女生中任选两人有 3 种结果, 所以至少有一名参赛学

$$\text{生是男生的概率 } P = 1 - \frac{3}{15} = \frac{4}{5}, \text{ 故}$$

B 错误;

两名参赛学生都是男生, 从 3 名男生中任选 2 人, 有 3 种结果, 所以两名参赛学生都是男生的概率

$$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}, \text{ 故 D 错误;}$$

“至多有一名参赛学生是男生”的对立事件是“两名参赛学生都是男生”, 则至多有一名参赛学生是

$$\text{男生的概率 } P = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}, \text{ 故 C}$$

正确.

10. ABC 【解析】事件 A 包含的样本点有 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (6, 1),

$(5,1), (4,1), (3,1), (2,1)$; 事件 B 包含的样本点有 $(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,3), (2,5), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,3), (4,5), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,3), (6,5)$; 事件 C 包含的样本点有 $(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)$; 事件 D 包含的样本点有 $(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)$.

由于事件 C 中的元素均在事件 D 中, 则 $C \subseteq D$, 故 A 正确;

事件 B 与事件 D 互斥, 且并集为必然事件, 故 B, D 为对立事件, 故 B 正确;

事件 A 与事件 C 不可能同时发生, 故 A, C 为互斥事件, 故 C 正确;

由题知 $P(A) = \frac{11}{36}, P(D) = \frac{1}{2}$, 事件 AD 包含的样本点有 $(1,1), (1,3), (1,5), (5,1), (3,1)$, $P(AD) = \frac{5}{36}$, 显然 $P(AD) \neq P(A) \cdot P(D)$, 故 D 错误.

11. ABC 【解析】根据题意, 不超过 30 的素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 共 10 个, 从中任意取两个不同的素数 $p, q (p < q)$: $p=2$ 时, q 有 9 个; $p=3$ 时, q 有 8 个; $p=5$ 时, q 有 7 个; $p=7$ 时, q 有 6 个; $p=11$ 时, q 有 5 个; $p=13$ 时, q 有 4 个; $p=17$ 时, q 有 3 个; $p=19$ 时, q 有 2 个; $p=23$ 时, q 有 1 个, 所以共有 $9+8+7+6+5+4+3+2+1=45$ 个样本点.
 $A = \{(3,5), (5,7), (11,13), (17,19)\}$, 共 4 个样本点;
 $B = \{(3,7), (7,11), (13,17), (19,23)\}$, 共 4 个样本点;

$C = \{(2,3), (2,5), (3,5), (3,7), (5,7), (7,11), (11,13), (13,17), (17,19), (19,23)\}$, 共 10 个样本点.

所以 $P(A) = P(B) = \frac{4}{45}, P(C) = \frac{2}{9}$, 显然 $P(A)P(B) \neq P(C)$, $P(A)+P(B) < P(C)$. 故 D 正确, A, B, C 错误.

12. 0.02 【解析】每个零件报废的概率为 $(1-0.8) \times (1-0.9) = 0.02$.

13. $\frac{1}{3} \quad \frac{1}{6}$ 【解析】设 $A_i (i=1, 2, 3)$ 为高一出场选手, $B_i (i=1, 2, 3)$ 为高二出场选手, 其中 i 表示段位, 则第一局比赛中, 共有 $3 \times 3 = 9$ 种可能情况, 其中高一能取得胜利的样本点为 $(A_2, B_1), (A_3, B_1), (A_3, B_2)$, 共 3 个, 所以第一局比赛高一获胜的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

在一场三局比赛中, 共有 $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ 种不同的可能情况, 其中高一能获胜的情况为 $(A_2B_1, A_3B_2, A_1B_3), (A_2B_1, A_1B_3, A_3B_2), (A_3B_2, A_2B_1, A_1B_3), (A_3B_2, A_1B_3, A_2B_1), (A_1B_3, A_2B_1, A_3B_2), (A_1B_3, A_3B_2, A_2B_1)$, 共 6 种, 故在一场比赛中高一获胜的概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

14. $\frac{2}{5}$ 【解析】 \because 点 A 的坐标为 $(2,1)$, \therefore 正方形 $ABCD$ 的边长为 2, 则 $D(0,1), C(0,3), B(2,3)$. \therefore 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 $E(-1,0)$, 且与正方形 $ABCD$ 的边恰有两个公共点, $\therefore k$ 满足 $k_{AE} < k < k_{EC}$. $\therefore k_{AE} = \frac{0-1}{-1-2} = \frac{1}{3}, k_{EC} = \frac{3-0}{0-(-1)} = 3$, $\therefore \frac{1}{3} < k < 3$,

则满足条件的 $k=1, 2$, 故所求概率 $P = \frac{2}{5}$.

15. 【解】 设事件 $A =$ “甲通过测试”; 事件 $B =$ “乙通过测试”; 事件 $C =$ “丙通过测试”.

(1) \because 3 人之间的测试互不影响, $\therefore P(ABC) = P(A)P(B) \cdot P(C) = 0.6 \times 0.8 \times 0.9 = 0.432$.

(2) $P(\bar{ABC}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = (1-0.6) \times 0.8 \times 0.9 = 0.288$.

(3) 设事件 $D =$ “甲、乙、丙至少有一人通过”, 则 $\bar{D} =$ “甲、乙、丙三人都没通过”, 则

$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - (0.4 \times 0.2 \times 0.1) = 0.992$.

16. 【解】 (1) 小明的过关数与奖品数如下表:

过关数	0	1	2	3	4	5
奖品数	0	1	2	4	8	16

小明在这十次游戏中所得奖品数的均值为 $\frac{1}{10} \times (1 \times 2 + 2 \times 3 + 4 \times 2 + 8 \times 1 + 16 \times 1) = 4$;

(2) 小明在四次游戏中所得奖品数为 $\{2, 2, 4, 8\}$;

小聪在四次游戏中所得奖品数为 $\{4, 4, 8, 16\}$.

现从中各选一次游戏, 奖品总数如下表:

	2	2	4	8
4	6	6	8	12
4	6	6	8	12
8	10	10	12	16
16	18	18	20	24

共 16 个基本事件, 总数超过 10 的有 8 个基本事件, 故所求的概率为 $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

17. 【解】 (1) 由题中频率分布直方图的数据, 可估计这 100 名学生得

分的平均数 $\bar{x} = (45 \times 0.01 + 55 \times 0.015 + 65 \times 0.02 + 75 \times 0.03 + 85 \times 0.015 + 95 \times 0.01) \times 10 = 70.5$.

(2) 在 $[80, 90)$ 和 $[90, 100]$ 这两组中的人数分别为 $100 \times (0.015 \times 10) = 15$ 和 $100 \times (0.01 \times 10) = 10$, 所以在 $[80, 90)$ 这组中抽取的人数为 $5 \times \frac{15}{10+15} = 3$, 分别记为 a, b, c ; 在 $[90, 100]$ 这组中抽取的人数为 2, 分别记为 1, 2, 所以在这 5 人中随机抽取 2 人的样本空间为 $\Omega = \{ab, ac, bc, a1, a2, b1, b2, c1, c2, 12\}$, 共 10 种取法, 其中两人得分都在 $[90, 100]$ 的情况只有 $\{12\}$, 共有 1 种, 所以两人得分都在 $[90, 100]$ 的概率 $P = \frac{1}{10}$.

18. 【解】(1) 已知甲每场比赛获胜的概率均为 $\frac{3}{4}$, 而乙、丙、丁相互之间胜负的可能性相同. 乙仅参加两场比赛且连负两场, 所以 1, 4 场均负, 所以乙连负两场的概率 $P = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

(2) 甲获得冠军, 则甲参加的比赛结果有三种情况: 1 胜 3 胜 6 胜; 1 负 4 胜 5 胜 6 胜; 1 胜 3 负 5 胜 6 胜, 所以甲获得冠军的概率 $P = \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{81}{128}$.

(3) 若乙的决赛对手是甲, 则两人参加的比赛结果有两种情况: 甲 1 胜 3 胜, 乙 1 负 4 胜 5 胜; 甲 1 负 4 胜 5 胜, 乙 1 胜 3 胜, 所以甲与乙在决赛相遇的概率 $P = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{128}$;

若乙的决赛对手是丙, 则两人只可能在第 3 场和第 6 场相遇, 两人参加的比赛的结果有两种

情况:

乙 1 胜 3 胜, 丙 2 胜 3 负 5 胜; 乙 1 胜 3 负 5 胜, 丙 2 胜 3 胜, 若考虑甲在第 4 场和第 5 场的结果, 乙与丙在第 3 场和第 6 场相遇的概率

$$P = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{128}$$

是第二次相遇的概率也为 $\frac{5}{128}$,

所以乙进入决赛, 且乙与其决赛对手是第二次相遇的概率为

$$\frac{27}{128} + \frac{5}{128} + \frac{5}{128} = \frac{37}{128}.$$

19. 【解】(1) 设事件 $A =$ “小游戏一获胜”; $B =$ “小游戏二获胜”; $C =$ “小游戏三获胜”. 小游戏一中取出一个球的样本空间为 $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 则 $n(\Omega_1) = 5$, 因为 $A = \{4, 5\}$, 所以 $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega_1)} = \frac{2}{5}$, 所以小游戏一获胜的概率为 $\frac{2}{5}$;

小游戏二中有放回地依次取出两个球的样本空间 $\Omega_2 = \{(x, y) | x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$, 则 $n(\Omega_2) = 25$, 因为 $B = \{(4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$, 所以 $n(B) = 4$, 所以 $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega_2)} = \frac{4}{25}$, 所以小游戏二获胜的概率为 $\frac{4}{25}$.

(2) 设 $M =$ “先玩小游戏二, 获得小礼品”; $N =$ “先玩小游戏三, 获得小礼品”.

又因为 $N = AC\bar{B} \cup \bar{A}CB \cup ACB$, 且 $AC\bar{B}, \bar{A}CB, ACB$ 互斥, 所以 $P(N) = P(AC\bar{B} \cup \bar{A}CB \cup ACB) = P(AC\bar{B}) + P(\bar{A}CB) + P(ACB) =$

$$\begin{aligned} & P(A)P(C)[1 - P(B)] + [1 - P(A)]P(C)P(B) + P(A) \cdot \\ & P(C)P(B) = \frac{2}{5} \times P(C) \times \frac{21}{25} + \frac{3}{5} \times \\ & P(C) \times \frac{4}{25} + \frac{2}{5} \times P(C) \times \frac{4}{25} = \frac{62}{125} \cdot \\ & P(C). \text{ 又因为 } M = ABC \cup \bar{A}BC \cup \\ & ABC, \text{ 且 } ABC, \bar{A}BC, ABC \text{ 互斥, } A, \\ & B, C \text{ 相互独立, 所以} \\ & P(M) = P(ABC \cup \bar{A}BC \cup ABC) = \\ & P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(ABC) = \\ & P(A)P(B)[1 - P(C)] + [1 - P(A)]P(B)P(C) + P(A)P(B) \cdot \\ & P(C) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{25} [1 - P(C)] + \frac{3}{5} \times \\ & \frac{4}{25} P(C) + \frac{2}{5} \times \frac{4}{25} P(C) = \frac{8}{125} + \\ & \frac{12}{125} \cdot P(C). \end{aligned}$$

若要接下来先玩小游戏三比先玩小游戏二获得小礼品的概率大, 则 $P(N) > P(M)$, 所以 $\frac{62}{125} P(C) > \frac{8}{125} + \frac{12}{125} P(C)$, 即 $P(C) > \frac{4}{25}$.

进行小游戏三时, 不放回地依次取出两个球的所有结果如下表:

		第二次				
		1	2	3	4	5
第一次	1	×	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
	2	(2, 1)	×	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
	3	(3, 1)	(3, 2)	×	(3, 4)	(3, 5)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	×	(4, 5)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	×

当 $m = 5, 6, 7$ 时, $P(C) = \frac{4}{20} > \frac{4}{25}$, 满足题意;

当 $m = 3, 4, 8, 9$ 时, $P(C) = \frac{2}{20} < \frac{4}{25}$, 舍去.

因此 m 的所有可能取值为 5, 6, 7.